Calcul de valeurs propres

AnaNum – Chapitre 6

I. Valeurs propres

$$A \in \mathbb{R}^{p\times p} \rightarrow \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad v_i \in \mathbb{C}^p$$
$$Av_i = \lambda_i v_i$$
$$AV = VD$$
$$v \rightarrow \lambda : \ \lambda = \frac{v^T A v}{v^T v} = \frac{v^T A v}{\|v\|^2} \underbrace{=}_{\text{si } \|v\|^2=1} v^T A v$$
$$\lambda \rightarrow v : \ (A - \lambda I)v = 0$$
$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}$$

cercles de Gershgorin : contiennent tous les λ

II. Valeurs singulières

$$B \in \mathbb{R}^{n\times p} \quad \rightarrow \quad \mu_i \in \mathbb{R} \quad u_i \in \mathbb{R}^p \quad v_i \in \mathbb{R}^p$$
$$Bv_i = \mu_i u_i \qquad B^T u_i = \mu_i v_i$$
$$B = UDV^T$$

$A = B^T B \ \Rightarrow \ (\mu_i^2, v_i)$ val. et vect. p. de A

III. Matrice carrée symétrique définie positive

$$(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \quad \underbrace{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0}_{\text{conv°}} \quad \underbrace{v_i^T v_i = 1}_{\text{conv°}}$$
$$v_i^T v_j = 0 \quad V^T V = I \quad (\text{base de } \mathbb{R}^n)$$

IV. Méthode de la puissance itérée

$$z^{(k+1)} = \frac{Az^{(k)}}{\|Az^{(k)}\|} \qquad \|Az^{(k)}\| \underset{k\to\infty}{\rightarrow} |\lambda_1| \qquad z^{(k)} \underset{k\to\infty}{\propto} v_1 \qquad A^{(2)} = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$$

Déflation : vp suivante

```
fonction [z, λ] = PuissanceIteree(A, z)
tant que (non conv) faire
    z = Az
    z = z/‖z‖
fintantque
λ = z'Az
```

```
fonction [Z, D] = PuissanceItereeMult(A, Z)
tant que (non conv) faire
    Z = AZ
    Z = orthogonalise(Z)      [Z R] = qr(Z)
fintantque
D = Z'AZ
```

V. Calcul de valeurs propres avec QR

$$\begin{cases} Z_k & = & AQ_k \\ (Q_{k+1}, R_{k+1}) & = & qr(Z_k) \end{cases} \qquad T_k = Q_k^T A Q_k \rightarrow D$$

$$\begin{aligned} T_k &= Q_k^T A Q_k = Q_k^T Q_{k+1} R_{k+1} &&= Q_{k+1}^{(2)} R_{k+1} \\ T_{k+1} &= Q_{k+1}^T A Q_{k+1} &&= R_{k+1} Q_{k+1}^{(2)} \end{aligned}$$

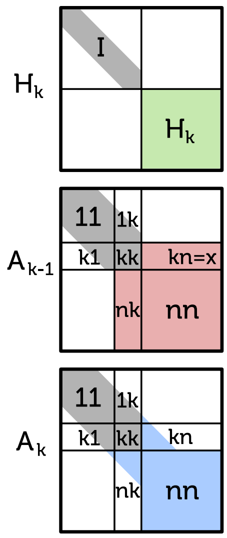
$\Rightarrow$ On a une suite de T_k calculable via QR pas besoin de Z_k

```
fonction [Z, D] = PuissIte_QR(A)
T = Q0'AQ0
tant que (non conv) faire
    [Q R] = qr(T)
    T = RQ
fintantque
```

```
fonction [Z, D] = PuissIte_QR_tridiag(A)
T = tri_diag(A)
tant que (non conv) faire
    [Q R] = qr_tri(T)
    T = RQ
fintantque
```

Tridiagonalisation

$$A_{nk}^{(k)} = A_{kn}^{(k)^T} = -\alpha e_1$$
$$A^{(k)} = H_k^T A^{(k-1)} H_k \ \Rightarrow \ A_{nn}^{(k)} = H_k^T A_{nn} H_k = A_{nn} - vw^T - wv^T$$
$$w = p - \frac{\beta v^T p}{2} v \qquad p = \beta A_{nn} v$$




```
fonction A = tri_diag (A)
pour k = 1 à n-2 faire
    [v, β] = vecteurDeHouse(A(k+1:n,k))             % x = A_kn
    p = β * A(k+1:n,k+1:n) * v                       % p = βA_nn v
    w = p - (β * v' * p / 2) * v                     % w = p - (βv^T p / 2) v
    A(k+1,k) = A(k,k+1) = ‖A(k+1:n,k)‖               % α
    A(k+1:n,k+1:n) = A(k+1:n,k+1:n) - v*w' - w*v'    % A_nn
finpour
```